

**КАЗАНСКИЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
АВТОНОМНОЙ НЕКОММЕРЧЕСКОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ
ОРГАНИЗАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЦЕНТРОСОЮЗА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ»**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Б1.О.15 АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Специальность: 10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация: «Разработка защищенного программного обеспечения»

Формы обучения: очная

Объем дисциплины:

в зачетных единицах: 11 з.е.

в академических часах: 396 ак.ч.

Форма промежуточной аттестации: зачет, экзамен

Оценочные материалы по дисциплине Алгебра и аналитическая геометрия

обсуждены и рекомендованы к утверждению решением кафедры естественных дисциплин, сервиса и туризма от 25 марта 2025 г., протокол № 6

одобрены Научно-методическим советом Казанского кооперативного института (филиала) от 2 апреля 2025 г., протокол № 3

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт оценочных материалов
2. Оценочные материалы:
 - 2.1. Оценочные материалы для проведения текущего контроля.
 - 2.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Целью оценочных материалов по дисциплине (далее –ОМ) является комплексная оценка результатов обучения.

ОМ предназначены для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

ОМ включают оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные материалы разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины Алгебра и аналитическая геометрия.

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

Формируемые компетенции (код и наименование компетенции)	Планируемые результаты обучения	Контролируемые разделы, темы дисциплины	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	3	4	5	6
ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности ОПК-3.1 Применяет знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности	Знает основные базовые математические знания (понятия, методы, алгоритмы алгебры и геометрии) связанные с информатикой и информационными технологиями Умеет применять основные методы и алгоритмы алгебры и геометрии в фундаментальной математике и информатике для разработки информационных технологий Владеет базовыми методами получения углубленных знаний для решения теоретических и прикладных задач в	Тема 1. Комплексные числа Тема 2. Многочлены Тема 3. Матрицы и системы линейных уравнений Тема 4. Векторная алгебра Тема 5. Элементы аналитической геометрии Тема 6. Линейные пространства Тема 7. Линейные подпространства Тема 8. Евклидово и унитарное пространство Тема 9. Линейные операторы Тема 10. Жорданова каноническая форма линейного оператора Тема 11. Квадратичные формы Тема 12. Кривые второго порядка Тема 13. Основы теории групп	<i>Контрольная работа №1;</i> <i>Контрольная работа №2;</i> <i>Контрольная работа №3;</i> <i>Контрольная работа №4</i>	<i>Вопрос на экзамене 1-60;</i> <i>Вопрос на экзамене 1-70</i>

Формируемые компетенции (код и наименование компетенции)	Планируемые результаты обучения	Контролируемые разделы, темы дисциплины	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	3	4	5	6
	области информационных технологий			
ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных	Знает основные методы и алгоритмы дисциплины и анализа данных Умеет применять изученные методы и алгоритмы на практике Владеет навыками решения практических задач на основе изученных методов и алгоритмов	Тема 1. Комплексные числа Тема 2. Многочлены Тема 3. Матрицы и системы линейных уравнений Тема 4. Векторная алгебра Тема 5. Элементы аналитической геометрии Тема 6. Линейные пространства Тема 7. Линейные подпространства Тема 8. Евклидово и унитарное пространство Тема 9. Линейные операторы Тема 10. Жорданова каноническая форма линейного оператора Тема 11. Квадратичные формы Тема 12. Кривые второго порядка Тема 13. Основы теории групп	1-27 1-30 1-39 1-37 1-68	Вопрос на экзамене 1-60; Вопрос на экзамене 1-70

2. Оценочные материалы по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия»

2.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Контрольная работа № 1 по теме «Комплексные числа».

№1.

Найти действительную и мнимую части комплексного числа $\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} \right)^5$.

№2.

Найти модуль и главное значение аргумента $(-\pi < \varphi \leq \pi)$ комплексного числа $w = e^{2+i}$.

№3.

Найти все значения корней и построить их на комплексной плоскости $\sqrt[4]{1-i}$.

№4.

Изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z| + \operatorname{Re} z \leq 1$.

№5.

Представить в алгебраической форме значение функции комплексного переменного (главное значение аргумента находится в промежутке $(-\pi; \pi]$) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} i$.

№6.

Доказать тождество: $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$.

Контрольная работа № 2 по теме «Многочлены»

№1.

Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 13$ на многочлен $g(x) = x - 2$.

№2.

Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби выражение $\frac{3x^3 + 4x + 9}{(x - 1)^5}$.

№3.

Чему равен показатель кратности корня 1 для многочлена $f(x) = x^5 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$?

№4.

Найти наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$ и $g(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

№5.

Найти корни уравнения $x^4 - 3x^3 + 8x - 6 = 0$.

Контрольная работа № 3 по теме «Матрицы и системы линейных уравнений».

№ 1 Вычислить

$$\det \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

№ 2 Найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 3 Решить систему линейных уравнений и определить ранг матрицы системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 19 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -13 \end{cases}$$

№ 4 Решить систему линейных уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа № 4 по теме «Векторная алгебра».

№1

Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = (3; 2; 2)$ на ось вектора $\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{b} = (-1; 4; -6)$ и $\vec{c} = (3; 2; -1)$.

№2

Средствами векторной алгебры вычислить длину высоты AP треугольника с вершинами в точках $A(6; 0; -3)$, $B(-2; 1; 2)$ и $C(1; 10; -1)$.

№3

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60° , причем $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Определить угол между векторами $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

№4

Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2; 1; -2)$ и $\vec{c} = (1; -2; 2)$.

№5

Зная векторы, образующие треугольник: $\vec{AB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{a} - 6\vec{b}$, $\vec{CA} = -3\vec{a} + 9\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярные орты, определить внутренние углы этого треугольника.

Контрольная работа № 5 по теме «Элементы аналитической геометрии».

№1

Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N} = (1; 3; -2)$ и отсекающей на оси Oх отрезок $a = 5$.

№2

Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранный угол, образованный плоскостями $-16x + 15y - 12z - 5 = 0$ и $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

№3

Две грани куба лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$. Вычислить объем этого куба.

№4

Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{b} = (2; -1; -2)$.

№5

Найти расстояние между прямыми $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

Контрольная работа № 6 по теме «Линейные пространства».

№1

В пространстве R_3 заданы вектор x и базис $e = \{e_1, e_2, e_3\}$. Координаты векторов заданы в некотором базисе $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Найти координаты вектора x в базисе e' и матрицу перехода от базиса $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ к $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

$$x = (1, 4, -1)$$

$$e'_1 = (5, -1, 2)$$

$$e'_2 = (2, 3, 0)$$

$$e'_3 = (-2, 1, 1)$$

№2

Найти размерности, базисы суммы и пересечения подпространств $H_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $H_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$a_1 = (2, 1, 2)^T \quad b_1 = (2, 3, -1)^T$$

$$a_2 = (1, 1, -1)^T \quad \text{и} \quad b_2 = (1, 2, 2)^T$$

$$a_3 = (1, 3, 3)^T \quad b_3 = (1, 1, -3)^T$$

№3

Считая, что векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, ортонормировать систему векторов $\vec{a}_1 = (i, 0, 1)^T$, $\vec{a}_2 = (i, i, 1)^T$, $\vec{a}_3 = (1, 0, i)^T$.

№4

Найти угол между вектором $\vec{b} = (2, 0, 1)^T$ и подпространством $L_1 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$, если $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 0)^T$.

№5

Найти расстояние между множествами $P_1 = H_1 + x_1$ и $P_2 = H_2 + x_2$, $H_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$ и $H_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$

$$a_1 = (1, 2, 2, 2) \quad b_1 = (2, 0, 2, 1)$$

$$a_2 = (2, -1, 1, 2) \quad \text{и} \quad b_2 = (1, -2, 0, -1)$$

$$x_1 = (4, 5, 3, 2) \quad x_2 = (1, -2, 1, -3)$$

№6

Найти базис ортогонального дополнения $L^\perp$ подпространства L , натянутого на векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, если $\vec{a}_1 = (1, 1, -1, -2)^T$, $\vec{a}_2 = (5, 8, -2, -3)^T$, $\vec{a}_3 = (3, 9, 3, 8)^T$.

№7

Считая векторы заданными координатами в ортонормированном базисе, проверить, что следующие системы векторов ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов пространства: $\vec{a}_1 = (1, -1, 1, -3)^T$, $\vec{a}_2 = (-4, 1, 5, 0)^T$

Контрольная работа по теме № 7 «Линейные операторы».

№1

Оператор φ переводит вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x})$. Является ли оператор φ линейным? Если является, то записать его матрицу.

a) $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 2x_3; x_1 - 3x_3)$

b) $\varphi(\vec{x}) = (x_1 + x_3; x_2^2; x_3 + 1)$

№2

Линейный оператор φ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу A . Найти матрицу этого оператора в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}_1 = (4, -4, -3)$, $\vec{e}_2 = (-8, 7, 5)$, $\vec{e}_3 = (-5, -1, 1)$, $\vec{e}'_1 = (1, -1, 1)$,

$\vec{e}'_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{e}'_3 = (0, 1, 1)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

№3

Для матрицы A найти жорданову форму и жорданов базис.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№4

Найти ортонормированный базис, в котором оператор простой структуры имеет канонический вид. Записать канонический вид матрицы оператора в этом базисе.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 18 & -13 & -3 \\ 18 & -9 & -7 \end{pmatrix}.$$

№5

Найти матрицу преобразования, переводящего векторы $\vec{a}_1 = (1, 4, -5)^T$, $\vec{a}_2 = (2, 3, -4)^T$, $\vec{a}_3 = (1, -2, -1)^T$ в векторы $\vec{b}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -1)^T$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 2)^T$ в том же базисе, в котором заданы координаты векторов.

Контрольная работа № 8 по теме «Квадратичные формы»

№1

Привести квадратичную форму к каноническому и нормальному виду, найти линейные невырожденные преобразования, приводящие квадратичную форму к этим видам.

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

№2

Найти все значения параметра λ , при которых положительно определена квадратичная форма:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

№3

Выяснить, что в следующих парах квадратичных форм одна форма является положительно определенной. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее положительно определенную форму к нормальному виду, а другую – к каноническому:

$$f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$$

$$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2$$

Контрольная работа № 9 по теме «Кривые и поверхности второго порядка».

№1

Определить вид кривой 2 порядка. Найти центр. Записать в каноническом виде, найти каноническую систему координат.

$$a) 9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$$

$$b) 9y^2 - 7y - 16 = 0$$

№2

Составить уравнение и определить тип кривой второго порядка, проходящей через 5 точек, заданных своими координатами:

$$(-1, -1), (1, 0), (0, 1), (3, 2), (2, 3)$$

№3

Исследовать зависимость типа кривой от параметра λ :

$$4x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 0$$

№4

Составить уравнение касательной к кривой в точке:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1, (3, 1);$$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0 (0, 1)$$

Контрольная работа № 10 по теме «Основы теории групп».

№1

Пусть задано множество комплексных чисел вида: $a = a_0 + ia_1$, где a_0, a_1 – принадлежат полю действительных чисел. Ввести операции сложения и умножения комплексных чисел и построить алгебру комплексных чисел. Является ли эта алгебра коммутативной по умножению? Является ли эта алгебра линейной алгеброй с делением?

№2

Постройте циклическую группу, порождаемую перестановками вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

№3

Задан многоугольник списком координат вершин:

x	-1	2	1	-2	0
y	1	2	-2	-2	0

Матрица аффинного преобразования имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите координаты вершин после преобразования, центры формы фигуры и площади до и после преобразования.

Критерии оценки контрольных работ:

— оценка “зачтено” выставляется при полном раскрытии темы контрольной работы, а также при последовательном, четком и логически стройном ее изложении. Студент отвечает на дополнительные вопросы, грамотно обосновывает принятые решения;

— оценка “не зачтено” выставляется за слабое и неполное раскрытие темы контрольной работы, несамостоятельность изложения материала, выводы и предложения, носящие общий характер, отсутствие наглядного представления работы, затруднения при ответах на вопросы.

Коллоквиум — наиболее распространенный метод текущего контроля знаний учащихся. При устном опросе устанавливается непосредственный контакт между преподавателем и учащимся, в процессе которого преподаватель получает широкие возможности для изучения индивидуальных особенностей усвоения учащимися учебного материала. Цель коллоквиума: текущая проверка знаний учащихся; проверка умений учащихся письменно излагать материал.

Перечень тем, включенных в коллоквиум первого семестра, приведен ниже:

Тема 1. Комплексные числа

Тема 2. Многочлены

Тема 3. Матрицы и системы линейных уравнений

Тема 4. Векторная алгебра

Тема 5. Элементы аналитической геометрии

В коллоквиум второго семестра включены следующие темы:

Тема 6. Линейные пространства

Тема 7. Линейные операторы

Тема 8. Квадратичные формы

Тема 9. Кривые и поверхности второго порядка

Тема 10. Основы теории групп

Вопросы для проведения коллоквиума по дисциплине «Алгебра и аналитическая геометрия» для каждой из перечисленных тем приведены ниже:

Тема 1. Комплексные числа

1.1. Прямоугольная и полярная системы координат. Взаимосвязь координат точек в системах.

1.2. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами.

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа.

1.4. Возведение комплексного числа в степень с целым показателем. Формула Муавра.

1.5. Извлечение корня из комплексного числа.

1.6. Показательная форма комплексного числа.

1.7. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме. Тригонометрические функции от комплексного числа.

Тема 2. Многочлены

2.1. Многочлен от одной переменной. Действия над многочленами. Корни многочленов. Теорема Безу.

2.2. Схема Горнера.

2.3. Кратные корни.

2.4. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида.

2.5. Свойства делимости многочленов.

2.6. Взаимно простые многочлены.

2.7. Свойства взаимно простых многочленов.

2.8. Корни квадратного уравнения

Тема 3. Матрицы и системы линейных уравнений

3.1. Матрицы, действия с матрицами – основные свойства.

3.2. Понятие определителя 2-го, 3-го и n -го порядка. Вычисление определителей 2-го, 3-го порядков.

3.3. Основные свойства определителей.

3.4. Вычисление определителей n -го порядка, теорема Лапласа.

3.5. Обратная матрица, вычисление обратных матриц.

3.6. Крамеровские системы линейных уравнений, их решение.

3.7. Метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса) решения систем линейных уравнений.

3.8. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы. Свойства ЛЗ и ЛНЗ. Базис и ранг строк.

3.9. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы.

3.10. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная

система решений однородных уравнений.

3.11. Неоднородные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений.

Тема 4. Векторная алгебра

4.1. Понятие вектора, сложение и разность векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

4.2. Скалярное и векторное умножение векторов. Основные свойства.

4.3. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения векторов.

Тема 5. Элементы аналитической геометрии

5.1. Уравнение прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми.

5.2. Общее уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.

5.3. Преобразование прямоугольных координат.

5.4. Полярная система координат. Нормальное уравнение прямой.

5.5. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями.

Тема 6. Линейные пространства

6.1. Определение линейного пространства. Примеры.

6.2. Свойства линейного пространства

6.3. Линейная зависимость элементов линейного пространства.

6.4. Свойства систем векторов.

6.5. Базис линейного пространства.

6.6. Размерность линейного пространства.

6.7. Преобразование координат вектора при замене базиса.

6.8. Определение линейного подпространства. Линейная оболочка.

6.9. Пересечение и сумма линейных подпространств

6.10. Прямая сумма линейных подпространств.

6.11. Размерность линейного подпространства

6.12. Определение евклидова пространства.

6.13. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

6.14. Неравенство Коши-Буняковского.

6.15. Нормированные пространства.

6.16. Ортогональное дополнение. Построение ортогонального дополнения.

6.17. Унитарное пространство.

Тема 7. Линейные операторы

7.1. Определение и примеры линейных операторов. Ядро и образ. Дефект и ранг.

7.2. Матрица линейного оператора и ее преобразование.

7.3. Характеристическое уравнение матрицы. Лямбда-матрица. Аннулирующий и минимальный многочлены.

7.4. Характеристическое уравнение линейного оператора.

7.5. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
7.6. Свойства собственных векторов. Вычисление собственных векторов. Ортогональная матрица. Ортогональное преобразование.

7.7. Инвариантные подпространства.

7.8. Треугольная форма.

7.9. Линейные операторы простой структуры.

7.10. Жорданова форма.

7.11. Жорданов базис.

Тема 8. Квадратичные формы

8.1. Основные определения квадратичных форм. Линейное преобразование переменных

8.2. Канонический вид квадратичной формы

8.3. Алгоритм метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

8.4. Ортогональное преобразование квадратичной формы. Приведение квадратичной

формы к каноническому виду при помощи преобразования переменных с верхней унитарной матрицей.

8.5. Закон инерции

8.6. Критерий Сильвестра

8.7. Пара квадратичных форм

Тема 9. Кривые и поверхности второго порядка

9.1. Основные определения. Преобразования координат: параллельный перенос и поворот; общий случай.

9.2. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

9.3. Центральные и нецентральные кривые второго порядка

9.4. Классификация кривых второго порядка

9.5. Ортогональное преобразование переменных кривой второго порядка

9.6. Распадающиеся кривые второго порядка.

9.7. Теорема единственности.

9.8. Эллипс. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.

9.9. Гипербола. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.

9.10. Парабола. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.

Тема 10. Основы теории групп

10.1. Некоторые общие понятия алгебры. Аксиомы группы.

10.2. Подгруппы. Классы смежности.

10.3. Циклические группы.

- 10.4. Арифметика остатков.
- 10.5. Функция Эйлера.
- 10.6. Мультипликативные обратные по модулю N .
- 10.7. Алгоритм Евклида. Расширенный алгоритм Евклида.
- 10.8. Китайская теорема об остатках.
- 10.9. Конечные поля.
- 10.10. Нормальные подгруппы и факторгруппы.
- 10.11. Классы смежности по нормальной подгруппе и факторгруппа.
- 10.12. Гомоморфизм.

Тестовые задания для проведения промежуточной аттестации

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности

ОПК-3.1 Применяет знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности

Знать	основные базовые математические знания (понятия, методы, алгоритмы алгебры и геометрии) связанные с информатикой и информационными технологиями
Уметь	применять основные методы и алгоритмы алгебры и геометрии в фундаментальной математике и информатике для разработки

ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

Знать	основные методы и алгоритмы дисциплины и анализа данных
Уметь	применять изученные методы и алгоритмы на практике

1. Задание комбинированного типа с выбором одного верного ответа из четырех предложенных и обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.

1. Вычислите: $(1 + i)^8$

- A) 16
- B) $16i$
- C) -16

D) $-16i$

Ответ: А

Обоснование: Обоснование: $(1 + i)^2 = 2i$, тогда $(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$

2. Какое из утверждений о многочлене $x^3 - 2x^2 + x - 2$ НЕВЕРНО?

A) Он имеет корень $x = 2$

B) Он неприводим над полем действительных чисел

C) Он раскладывается на множители $(x - 2)(x^2 + 1)$

D) Все его комплексные корни различны

Ответ: В

Обоснование: Многочлен раскладывается как $(x - 2)(x^2 + 1)$, поэтому приводим над $\mathbb{R}$

3. Ранг матрицы $\begin{bmatrix} 1, 2, 3 \\ 4, 5, 6 \\ 7, 8, 9 \end{bmatrix}$ равен:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 0

Ответ: В

Обоснование: Все строки линейно зависимы (третья = 2×вторая - первая), поэтому ранг 2

4. Скалярное произведение векторов $a = (1, 2, 3)$ и $b = (4, -1, 2)$ равно:

A) 8

B) 12

C) 10

D) 6

Ответ: А

Обоснование: $a \cdot b = 1 \times 4 + 2 \times (-1) + 3 \times 2 = 4 - 2 + 6 = 8$

5. Каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-3, 0)$ и $F_2(3, 0)$ и большой полуосью $a=5$:

A) $x^2/25 + y^2/16 = 1$

B) $x^2/16 + y^2/25 = 1$

C) $x^2/25 - y^2/16 = 1$

D) $x^2/9 + y^2/25 = 1$

Ответ: А

Обоснование: $c=3$, $a=5$, тогда $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, уравнение $x^2/25 + y^2/16 = 1$

6. Размерность линейной оболочки векторов $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ равна:

- A) 3
- B) 2
- C) 1
- D) 0

Ответ: B

Обоснование: Все векторы лежат в плоскости $z=0$, максимальное число линейно независимых – 2

7. Ортогональное дополнение к прямой $y=x$ в R^2 имеет размерность:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) -1

Ответ: B

Обоснование: В R^2 ортогональное дополнение к прямой есть прямая, размерность 1

8. След матрицы оператора проектирования на плоскость $x+y+z=0$ в R^3 равен:

- A) 3
- B) 2
- C) 1
- D) 0

Ответ: B

Обоснование: След оператора проектирования равен размерности образа, здесь образ - плоскость, размерность 2

9. Канонический вид квадратичной формы $x^2 + 4xy + 4y^2$:

- A) ξ^2
- B) $\xi^2 + \eta^2$
- C) $\xi^2 - \eta^2$
- D) $-\xi^2$

Ответ: A

Обоснование: $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$, одна переменная, остальные нули

10. Порядок группы симметрий правильного треугольника:

- A) 3
- B) 4
- C) 6
- D) 8

Ответ: C

Обоснование: Группа диэдра D_3 имеет порядок 6 (3 поворота + 3 отражения)

2. Задание комбинированного типа с выбором нескольких вариантов ответа из предложенных и развернутым обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.

11. Какие из утверждений о комплексных числах ВЕРНЫ?

- 1) Модуль произведения равен произведению модулей
- 2) Аргумент суммы равен сумме аргументов
- 3) Сопряжение суммы равно сумме сопряжений
- 4) Комплексные числа образуют поле

Ответ: 1,3,4

Обоснование: Верны 1,3,4. Утверждение 2 неверно - аргумент суммы не равен сумме аргументов

12. Какие матрицы обязательно имеют обратные?

- 1) Единичная матрица
- 2) Матрица поворота на 90°
- 3) Нильпотентная матрица
- 4) Матрица перестановки

Ответ: 1,2,4

Обоснование: Верны 1,2,4. Нильпотентная матрица A ($A^n=0$) вырождена, обратной не имеет

13. Какие из свойств выполняются для скалярного произведения в евклидовом пространстве?

- 1) $(x,y) = (y,x)$
- 2) $(x,x) \geq 0$
- 3) $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x=0$
- 4) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$

Ответ: 1,2,3,4

Обоснование: Верны все четыре - это аксиомы евклидова пространства

14. Какие из утверждений о линейных операторах ВЕРНЫ?

- 1) Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы
- 2) Размерность собственного подпространства не превышает кратности собственного значения
- 3) Любой линейный оператор имеет жорданов базис
- 4) След оператора не зависит от выбора базиса

Ответ:1,2,4

Обоснование: Верны 1,2,4. Утверждение 3 верно только для алгебраически замкнутого поля

15. Какие кривые являются кривыми второго порядка?

- 1)Окружность
- 2)Спираль Архимеда
- 3)Парабола
- 4)Гипербола

Ответ:1,3,4

Обоснование: Верны 1,3,4. Спираль Архимеда - трансцендентная кривая

3. Задание закрытого типа на установление соответствия. Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.

16. Установите соответствие между многочленами и их свойствами:

Многочлен	Свойство
1. $x^2 + 1$	А. Неприводим над $\mathbb{R}$
2. $x^2 - 1$	В. Неприводим над $\mathbb{Q}$
3. $x^2 - 2$	С. Приводим над $\mathbb{R}$
4. $x^3 - 1$	Д. Имеет кратные корни

Ответ: 1-А, 2-С, 3-В, 4-С

17. Установите соответствие между матрицами и их свойствами:

Матрица	Свойство
1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	А. Нильпотентная
2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	В. Ортогональная
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	С. Симметрическая
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	Д. Единичная

Ответ: 1-Д, 2-А, 3-В, 4-С

18. Установите соответствие между геометрическими объектами и их размерностями:

Объект	Размерность
1. Точка в R^3	A. 0
2. Прямая в R^3	B. 1
3. Плоскость в R^3	C. 2
4. Все пространство R^3	D. 3

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

19. Установите соответствие между кривыми и их каноническими уравнениями:

Кривая	Уравнение
1. Эллипс	A. $y^2 = 2px$
2. Гипербола	B. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
3. Парабола	C. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
4. Окружность	D. $x^2 + y^2 = R^2$

Ответ: 1-B, 2-C, 3-A, 4-D

20. Установите соответствие между группами и их порядками:

Группа	Порядок
1. Z_5	A. 5
2. S_3	B. 6
3. A_3	C. 3
4. Z_6	D. 6

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

**4. Задание закрытого типа на установление последовательности.
Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.**

21. Расположите в правильном порядке шаги метода Гаусса решения СЛУ:

- 1) Приведение матрицы к ступенчатому виду
- 2) Обратный ход
- 3) Запись расширенной матрицы системы
- 4) Нахождение ранга матрицы

Ответ: 3, 1, 4, 2

22. Расположите в правильном порядке шаги нахождения жордановой формы:

- 1)Нахождение характеристического многочлена
- 2)Построение жорданова базиса
- 3)Определение жордановых клеток
- 4)Нахождение собственных значений

Ответ: 1, 4, 3, 2

23. Расположите в правильном порядке шаги приведения квадратичной формы:

- 1)Выделение полного квадрата
- 2)Определение знакоопределенности
- 3)Линейная замена переменных
- 4)Запись канонического вида

Ответ: 1, 3, 4, 2

24. Расположите в правильном порядке шаги исследования кривой второго порядка:

- 1)Определение типа кривой
- 2)Приведение к каноническому виду
- 3)Выделение полных квадратов
- 4)Поворот системы координат

Ответ: 3, 4, 2, 1

25. Расположите в правильном порядке этапы доказательства теоремы о гомоморфизмах групп:

- 1)Построение гомоморфизма
- 2)Проверка сохранения групповой операции
- 3)Определение ядра и образа
- 4)Доказательство изоморфизма $G/\text{Ker}\varphi \cong \text{Im}\varphi$

Ответ: 1, 2, 3, 4

5.Задание открытого типа с развернутым ответом.

Уровень сложности высокий. Время выполнения 10 мин.

26. Найдите жорданову форму матрицы и соответствующий жорданов базис:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

Характеристический многочлен: $\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(2-\lambda)$

Собственные значения: $\lambda=3$ (кратность 2), $\lambda=2$ (кратность 1)

Для $\lambda=3$: $A-3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ранг = 2

Число жордановых клеток: $3 - 2 = 1$ клетка размера 2×2

Для $\lambda=2$: одна клетка 1×1

Жорданова форма: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Жорданов базис: находим собственный и присоединенный векторы

27. Исследуйте кривую второго порядка и постройте ее:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$$

Решение:

Выделяем полные квадраты:

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = 43$$

$$9(x-1)^2 - 9 - 4(y+2)^2 + 16 = 43$$

$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 36$$

$$(x-1)^2/4 - (y+2)^2/9 = 1$$

Получили гиперболу с центром (1,-2), полуосями $a=2$, $b=3$

28. Докажите, что множество матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ образует поле относительно сложения и умножения матриц.

Доказательство:

1. Замкнутость относительно сложения и умножения
2. Существование нулевого и единичного элементов
3. Существование противоположного и обратного элементов
4. Коммутативность умножения
5. Дистрибутивность

Изоморфизм с полем комплексных чисел: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \leftrightarrow a+bi$

Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (тестирование)

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

Оценка	Уровень сформированности компетенции	Критерии
«Отлично» («зачтено»)	Высокий	Выполнено более 80% заданий предложенного теста
«Хорошо» («зачтено»)	Хороший	Выполнено 60-80% заданий предложенного теста
«Удовлетворительно» («зачтено»)	Достаточный	Выполнено 35-60% заданий предложенного теста

«Неудовлетворительно» («не зачтено»)	Недостаточный	Выполнено менее 35% заданий предложенного теста
---	---------------	--

2.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену:

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности

ОПК-3.1 Применяет знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности

ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

Вопросы для подготовки к экзамену 1 семестр

1. Прямоугольная и полярная системы координат. Взаимосвязь координат точек в системах.
2. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа.
4. Возведение комплексного числа в степень с целым показателем. Формула Муавра.
5. Извлечение корня из комплексного числа.
6. Показательная форма комплексного числа.
7. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме.
8. Тригонометрические функции от комплексного числа.
9. Многочлен от одной переменной. Действия над многочленами. Корни многочленов.
10. Теорема Безу.
11. Схема Горнера.
12. Кратные корни.
13. Наибольший общий делитель двух многочленов. Алгоритм Евклида.
14. Свойства делимости многочленов.
15. Взаимно простые многочлены.
16. Свойства взаимно простых многочленов.

17. Корни квадратного уравнения
18. Матрицы, действия с матрицами – основные свойства.
19. Понятие определителя 2-го, 3-го и n-го порядка. Вычисление определителей 2-го, 3-го порядков.
20. Основные свойства определителей.
21. Вычисление определителей n-го порядка, теорема Лапласа.
22. Обратная матрица, вычисление обратных матриц.
23. Крамеровские системы линейных уравнений, их решение.
24. Метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса) решения систем линейных уравнений.
25. Линейная зависимость и линейная независимость строк (столбцов) матрицы. Свойства ЛЗ и ЛНЗ. Базис и ранг строк.
26. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы.
27. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородных уравнений.
28. Неоднородные системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений.
29. Понятие вектора, сложение и разность векторов. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.
30. Скалярное и векторное умножение векторов. Основные свойства.
31. Смешанное произведение векторов. Свойства смешанного произведения векторов.
32. Уравнение прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми.
33. Общее уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.
34. Преобразование прямоугольных координат.
35. Полярная система координат. Нормальное уравнение прямой.
36. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями.

Вопросы для подготовки к экзамену 2 семестр

1. Определение линейного пространства. Примеры.
2. Свойства линейного пространства.
3. Линейная зависимость элементов линейного пространства.
4. Свойства систем векторов.
5. Базис линейного пространства.
6. Размерность линейного пространства.
7. Преобразование координат вектора при замене базиса.
8. Определение линейного подпространства. Линейная оболочка.
9. Пересечение и сумма линейных подпространств
10. Прямая сумма линейных подпространств.
11. Размерность линейного подпространства
12. Определение евклидова пространства.
13. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

14. Неравенство Коши-Буняковского.
15. Нормированные пространства.
16. Ортогональное дополнение. Построение ортогонального дополнения.
17. Унитарное пространство.
18. Определение и примеры линейных операторов. Ядро и образ. Дефект и ранг.
19. Матрица линейного оператора и ее преобразование.
20. Характеристическое уравнение матрицы. Лямбда-матрица. Аннулирующий и минимальный многочлены.
21. Характеристическое уравнение линейного оператора.
22. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
23. Свойства собственных векторов. Вычисление собственных векторов. Ортогональная матрица. Ортогональное преобразование.
24. Инвариантные подпространства.
25. Треугольная форма.
26. Линейные операторы простой структуры.
27. Жорданова форма.
28. Жорданов базис.
29. Основные определения квадратичных форм. Линейное преобразование переменных
30. Канонический вид квадратичной формы
31. Алгоритм метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
32. Ортогональное преобразование квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду при помощи преобразования переменных с верхней унитарной матрицей.
33. Закон инерции.
34. Критерий Сильвестра.
35. Пара квадратичных форм
36. Основные определения. Преобразования координат: параллельный перенос и поворот; общий случай.
37. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.
38. Центральные и нецентральные кривые второго порядка
39. Классификация кривых второго порядка
40. Ортогональное преобразование переменных кривой второго порядка
41. Распадающиеся кривые второго порядка.
42. Теорема единственности.
43. Эллипс. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.
44. Гипербола. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.
45. Парабола. Определение. Вывод канонического уравнения. Исследование формы. Директрисы и касательные. Оптические свойства.
46. Некоторые общие понятия алгебры. Аксиомы группы.

47. Подгруппы. Классы смежности.
48. Циклические группы.
49. Арифметика остатков.
50. Функция Эйлера.
51. Мультипликативные обратные по модулю N .
52. Алгоритм Евклида. Расширенный алгоритм Евклида.
53. Китайская теорема об остатках.
54. Конечные поля.
55. Нормальные подгруппы и факторгруппы.
56. Классы смежности по нормальной подгруппе и факторгруппа.
57. Гомоморфизм.

Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (ответы на вопросы)

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

Оценка	Уровень сформированности компетенции	Критерии
«Отлично» («зачтено»)	Высокий	Обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, тесно увязывает теорию с практикой. Обучающийся не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с практическими заданиями, показывает знания нормативного материала, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, демонстрирует умение самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок
«Хорошо» («зачтено»)	Хороший	Обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, допускает несущественные неточности в ответе на вопросы, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми навыками при выполнении практических заданий.
«Удовлетворительно» («зачтено»)	Достаточный	Обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности и ошибки в ответе на вопросы, нарушает последовательность

		в изложении программного материала и испытывает затруднения при выполнении практических заданий.
«Неудовлетворительно» («не зачтено»)	Недостаточный	Обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания или выполняет неправильно.

Обновление оценочных материалов

обсуждены и рекомендованы к утверждению решением кафедры наименование кафедры от «___» _____ 20__ г., протокол № ____.

одобрены Научно-методическим советом _____ университета (института (филиала)) от «___» _____ 20__ г., протокол № ____.